Prof. Dr. Nicole Megow
Franziska Eberle

Sommer 2019

Operations Research

Übungsblatt 11 (Abgabe am 02.07.2019)

Übung 11.1 (Sommerball) (10 Punkte)

Die Universität Bremen veranstaltet ihren jährlichen Sommerball und erwartet, dass insbesondere für die berümt berüchtigte rote Krawatte und die rote Fliege hohe Nachfrage herrschen wird. Leider sind es nur noch fünf Tage bis zum Ball und die Uni Bremen, die die Kleidungsstücke selbst produziert, hat nur noch 40m^2 des roten Stoffs auf Lager. Für zehn Krawatten werden 10m^2 und für zehn Fliegen 7m^2 des roten Stoffs benötigt. Sowohl bei Krawatten als auch bei Fliegen werden jeweils zehn auf einmal produziert. Für die Produktion von zehn Fliegen oder zehn Krawatten benötigt die hauseigenen Näherin je einen Tag. Die Universität erwartet, dass 17€ pro Krawatte und 12€ pro Fliege bezahlt werden.

(a) Stellen Sie ein ILP auf, um die optimalen Produktionsmengen an Krawatten und Fliegen zu bestimmen. Ziel ist es, die Einnahmen zu maximieren. Beachten Sie dabei, dass $10x_k$ und $10x_f$ die tatsächlich produzierte Menge an Krawatten bzw. Fliegen darstellt. (2 Punkte)

(b) Lösen Sie das Problem durch Anwenden des Branch & Bound - Algorithmus' aus der Vorlesung. Zeichnen Sie auf Ihrer Abgabe den Branch & Bound - Baum und geben Sie an jedem Knoten die aktuellen Werte der Variablen sowie den Zielfunktionswert an. Stellen Sie auf den Kanten dar, auf welcher Variable gerade gebrancht wird oder wieso der Baum an dieser Stelle beschnitten wird. (8 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie Ihre Lieblingsmethode zum Lösen der auftretenden LPs.

Übung 11.2 (Knapsack und Branch & Bound) (4+1 Punkte)

Beim Knapsack-Problem sind n Gegenstände mit unterschiedlichen Gewichten $w_j \leq B$ und Werten v_j für $j \in 1, \ldots, n$ gegeben. Die Aufgabe besteht darin, zu entscheiden, welche der Gegenstände in den Rucksack (oder Knapsack) der Größe B gepackt werden sollen, um den Gesamtwert zu maximieren. Das Problem lässt sich als ILP formulieren:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{j=1}^{n} v_j\, x_j & & & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} w_j\, x_j & \leq & B & \\ & x_j & \in & \{0,1\} & \text{für alle } j \in \{1,\ldots,n\} \end{array}$$

Dieses scheinbar einfache Problem stellt allgemeine Branch&Bound-Algorithmen vor große Herausforderungen. Ziel dieser Aufgabe ist es herauszufinden wieso.

Wir nehmen dafür an, dass die Gegenstände identisch sind, d.h., die Gegenstände wiegen gleich viel und erzielen den gleichen Wert, falls sie eingepackt werden. Genauer gesagt, sei $w_j = 2$ und $v_j = v > 0$. Ferner sei $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

(a) Was ist die optimale Lösung, wenn B gerade ist? Was passiert, wenn B ungerade ist? (1 Punkt)

(b) Wie viele Subprobleme muss ein B&B-Algorithmus, der auf der LP-Relaxation basiert, lösen, wenn B ungerade ist? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

(c) Wie lässt sich das oben auftretende Problem beheben? (1 Punkt*)

Übung 11.3 (Projektplanung) (5+2 Punkte)

Eine sehr gute Freundin von Ihnen hat sich vor Kurzem als Webdesignerin selbstständig gemacht und hat nun n Aufträge für Webseiten auf ihrem Schreibtisch. Sie hat mit ihren Kunden Liefertermine d_j für $1 \leq j \leq n$ vereinbart, bis zu denen die Homepages fertiggestellt werden müssen. Aufgrund ihrer Erfahrung während ihres Studiums kann sie abschätzen, wie lange sie für die einzelnen Seiten noch arbeiten muss (p_j). Um keinen ihrer neuen Kunden zu verprellen, möchte sie die maximale Differenz zwischen ausgemachtem Termin d_j und tatsächlicher Fertigstellung C_j minimieren. Sei $L_j := \max\{C_j - d_j, 0\}$. Dann ist das Ziel ihrer Freundin $\max_{1 \leq j \leq n} L_j$ zu minimieren.

Folgende Tabelle gibt die Werte wieder, wobei die Zeit in Tagen gemessen wird.

Jobs	1	2	3	4	5	6	7	8
p_j	5	4	3	6	2	7	8	2
d_j	3	5	11	12	13	20	21	21

(a) Zeigen Sie für das allgemeine Problem bestehend aus n Aufträgen mit Bearbeitungsdauern p_j und Lieferterminen d_j, dass eine Bearbeitung in aufsteigender Reihenfolge der Liefertermine optimal ist. Diese Reihenfolge nennt sich *Earliest Deadline First* oder kurz *EDF*. (3 Punkte)

(b) Verwenden Sie EDF um Ihrer Freundin zu helfen. (2 Punkte)

(c) Nehmen Sie nun an, dass einige der Homepages nur bearbeitet werden können, wenn andere fertiggestellt wurden. Diese Abhängigkeiten werden mit Hilfe eines kreisfreien, gerichteten Graphen $G = ([n], E)$ dargestellt, wobei $(i, j) \in E$ bedeutet, dass $C_i \leq S_j$ gelten muss. Hier ist S_j der Starttermin von Auftrag j. Wie müssen Sie EDF verändern, um das neue Problem zu lösen? (2 Punkte*)

Abgegebener CPLEX- oder Mosel-Code für Modellieraufgaben wird nicht mehr bewertet.

---

* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.