

## Operations Research

### Übungsblatt 10 (Abgabe am 25.06.2019)

**Übung 10.1 (Dance!)**

(4 Punkte)

Bei der Premiere von Avenger's Endgame soll zum Abschluss noch einmal getanzt werden. In der unten stehenden Tabelle sehen Sie, welche Schauspielerin mit welchem Schauspieler tanzen kann. Ein K steht dabei für kompatibel. Leider kommen sich einige der Schauspieler beim Tanzen in die Quere. Ziel ist es nun, einen Weg zu finden, so dass so viele Paare wie möglich auf der Tanzfläche zu sehen sind.

|                    | Chris Evans | Chris Hemsworth | Chris Pratt | Tom Hiddleston | Benedict Cumberbatch |
|--------------------|-------------|-----------------|-------------|----------------|----------------------|
| Carol Danvers      |             | K               |             |                |                      |
| Karen Gillian      | K           |                 |             |                |                      |
| Scarlett Johansson | K           | K               |             |                |                      |
| Brie Larson        | K           | K               |             |                |                      |
| Elisabeth Olsen    |             |                 | K           | K              | K                    |

- Formulieren Sie obiges Problem als maximales bipartites Matching in einem Graphen. Wie sieht die Knotenmenge aus? Was sind die Kanten? (1 Punkt)
- Zeichnen Sie ein Netzwerk, mit dem Sie obiges Problem als Max-Fluss-Problem lösen können. (1 Punkt)
- Lösen Sie das maximale Flussproblem. Wer tanzt mit wem? (2 Punkte)

**Übung 10.2 (Stabile Matchings)**

(7 Punkte)

- Es seien die folgenden Präferenzen gegeben:

| Männer | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Björn  | Anna   | Amy    | Nadine | Sabine | Kim    |
| Jan    | Nadine | Kim    | Amy    | Anna   | Sabine |
| Tim    | Kim    | Sabine | Anna   | Nadine | Amy    |
| Tobias | Amy    | Nadine | Anna   | Kim    | Sabine |
| Bernd  | Kim    | Nadine | Amy    | Sabine | Anna   |

| Frauen | 1     | 2     | 3      | 4      | 5     |
|--------|-------|-------|--------|--------|-------|
| Amy    | Bernd | Björn | Jan    | Tobias | Tim   |
| Kim    | Tim   | Jan   | Tobias | Björn  | Bernd |
| Anna   | Jan   | Tim   | Tobias | Bernd  | Björn |
| Nadine | Björn | Bernd | Tobias | Tim    | Jan   |
| Sabine | Tim   | Jan   | Bernd  | Tobias | Björn |

Finden Sie ein stabiles Matching mit Gale Shapley's Algorithmus. Tun Sie dies sowohl für den Fall, dass die Männer Anträge machen, als auch für den Fall, dass die Frauen dies tun. Vergleichen Sie die resultierenden Matchings und geben Sie Ihre Zwischenschritte an. (5 Punkte)

- (b) Finden Sie ein Beispiel mit 2 Männern und 2 Frauen, welches zeigt, dass es mehr als ein stabiles Matching geben kann.

**Übung 10.3** (TSP mit Mosel)

(6 Punkte)

Sei  $G = (V, E)$  der vollständige Graph auf  $n = |V|$  Knoten. Sei  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  eine symmetrische Distanzmatrix von  $G$ , d.h., die Entfernung zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  beträgt  $d_{ij} = d_{ji}$ . Das Traveling Salesman Problem (TSP) fragt nach einer Tour im Graphen, die jeden Knoten genau einmal besucht und wieder im Ausgangsknoten endet.

Folgende ILP-Formulierung dieses Problems haben wir in der Rechnerübung besprochen. Für  $W \subset V$  enthalte  $E(W)$  gerade die Kanten, die *zwischen* zwei Knoten  $i, j \in W$  verlaufen. Die Menge der letzten Ungleichungen wird als Subtour Elimination Constraints bezeichnet.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in [n] \\ & \sum_{i=1}^n x_{ji} = 1 \quad \forall j \in [n] \\ & \sum_{e \in E(W)} x_e \leq |W| - 1 \quad \forall \emptyset \neq W \subsetneq V \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Bitte installieren Sie sich die Community Version von FICO Xpress Workbench. Sie finden diese nach Anlegen eines Community-Accounts unter

<https://content.fico.com/1/517101/2018-12-04/5189n>.

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben für jeden der drei Datensätze von der Kurshomepage.

- (a) Lösen Sie das entstehende TSP-Problem mit Hilfe von Mosel oder CPLEX zunächst ohne Subtour Elimination Constraints. Wie sieht Ihre Lösung aus? Fügen Sie nun alle SECs hinzu und lösen Sie erneut. Geben Sie die Lösungen als Tour auf Ihrer (schriftlichen) Abgabe an. (je 1 Punkt)
- (b) Zeichnen Sie die Lösung mit Hilfe von Mosel. Geben Sie bitte Ihre Zeichnungen als PDF oder ausgedruckt mit ab. (je 1 Punkt)

---

Abgegebener CPLEX- oder Mosel-Code für Modellieraufgaben wird nicht mehr bewertet.

---

\* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.