Universität Bremen FB3: Mathematik/Informatik

Prof. Dr. Nicole Megow
Franziska Eberle

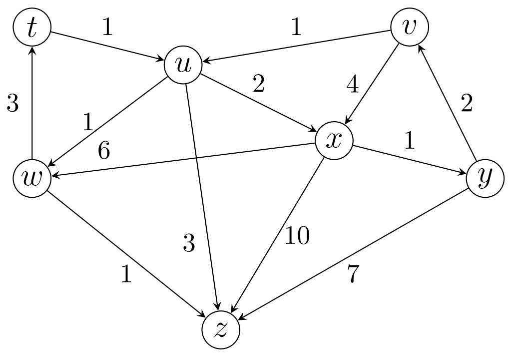
Sommer 2019

Operations Research

Übungsblatt 7 (Abgabe am 28.05.2019)

Übung 7.1 (Algorithmus von Dijkstra) (8 Punkte)

(a) Ermitteln Sie für den abgebildeten Graphen mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und deren Länge, ausgehend von x. Geben Sie in nachvollziehbarer Art und Weise die Zwischenschritte an. (3 Punkte)



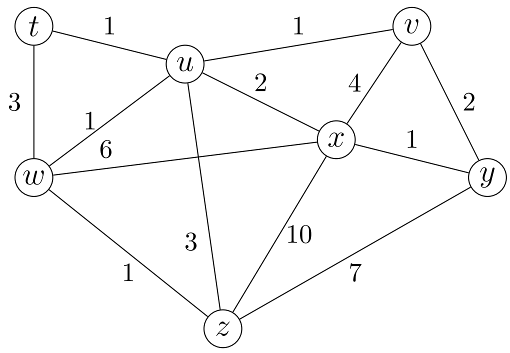
(b) Geben Sie einen Graphen $G = (V, E)$ an, der gerichtete Kanten mit negativen Kantengewichten enthält, jedoch keinen Kreis negativer Länge, und bei dem der Algorithmus von Dijkstra versagt. Erklären Sie Ihre Lösung kurz. (2 Punkte)

(c) Finden Sie einen Graphen $G = (V, E)$, der gerichtete Kanten mit negativem Gewicht enthält, bei dem der Algorithmus von Dijkstra aber ein korrektes Ergebnis liefert. G soll $n \geq 3$ Knoten und $m \geq n+3$ Kanten enthalten. Erklären Sie Ihre Lösung kurz. (2 Punkte)

(d) Begründen Sie, ob der Algorithmus dadurch repariert werden kann, dass auf alle Gewichte ein hinreichend großer Wert addiert wird. (1 Punkt)

Übung 7.2 (Algorithmus von Prim) (4 Punkte)

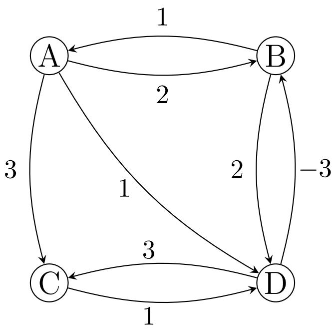
Wir betrachten erneut den Graphen aus Aufgabe 7.1; nun allerdings ungerichtet.



(a) Ermitteln Sie den MST mit Hilfe des Algorithmus von Prim, ausgehend von x. (2 Punkte)

(b) Was fällt Ihnen auf im Vergleich zum Algorithmus von Dijkstra? Welche Ähnlichkeiten sehen Sie? Was sind die Unterschiede? (2 Punkte)

Übung 7.3 (Algorithmus von Bellman und Ford) (3 Punkte)



Führen Sie den Bellman-Ford-Algorithmus auf obigem Graphen mit Startknoten A aus. Die Knoten werden dabei in alphabetischer Reihenfolge betrachtet. Sie dürfen den Algorithmus vorzeitig abbrechen, wenn sich keine weiteren Änderungen mehr ergeben. Geben Sie für jede Runde des Algorithmus die Updates der Distanzlabel an.

Übung 7.4 (Kürzeste Wege als ILP) (3 Punkte)

Sei $G = (V, E, c)$ ein Graph mit Kantengewichten c_e für $e \in E$. Seien $s, t \in V$ zwei Knoten in G. Formulieren Sie ein ILP, das den kürzesten Weg zwischen s und t findet. Verwenden Sie binäre Variablen x_e, die angeben, ob die Kante $e \in E$ auf dem ausgewählten kürzesten Weg zwischen s und t liegen.

Hinweis: Wie können Sie einen kürzesten Weg zwischen s und t mit Hilfe einer Schnittbedingung wie für das MST-Problem formulieren?

Übung 7.5 (Optimalitätprinzip von Bellman) (3 Punkte*)

Sei $P = e_1 e_2 \ldots e_k$ ein kürzester Weg von v_0 zu v_k, wobei $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i < j \leq k$ auch $P' = e_i \ldots e_j$ ein kürzester $v_{i-1}v_j$-Weg ist.

* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.