Prof. Dr. Nicole Megow
Franziska Eberle

Sommer 2019

Operations Research

Übungsblatt 6 (Abgabe am 21.05.2019)

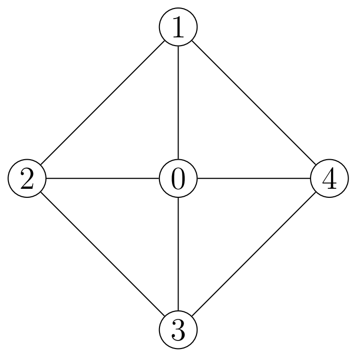
Übung 6.1 (TU Matrizen) (4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Matrizen total unimodular sind.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2 Punkte) (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2 Punkte)

Übung 6.2 (TU im Museum) (6 Punkte)

Ihr Erfolg bei der Alienkunstausstellung als Museumswächter hat sich herumgesprochen und nun landen täglich mehrere hundert Anfragen aus allen Teilen der Milchstraße auf Ihrem Schreibtisch. Der folgende Graph $G = (V, E)$ ist der Grundriss eines der Museen, die Sie bewachen sollen.



(a) Geben Sie die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix M des Graphen an und begründen Sie, wieso diese nicht total unimodular ist. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die LP-Relaxierung für das Problem Minimale Knotenüberdeckung auf und finden Sie eine optimale Lösung für das LP. (2 Punkte)

(c) Interpretieren Sie die Lösung des LPs in Bezug auf die Größe einer minimalen Knotenüberdeckung und eines maximalen Matchings in G. (2 Punkte)

Hinweis: Sie können die Lösung für (b) entweder durch scharfes Hinsehen oder mit Hilfe von CPLEX bestimmen. Eine Abgabe des Programmcodes ist jedoch nicht nötig.

Übung 6.3 (Kruskal und Prim) (6+1 Punkte)

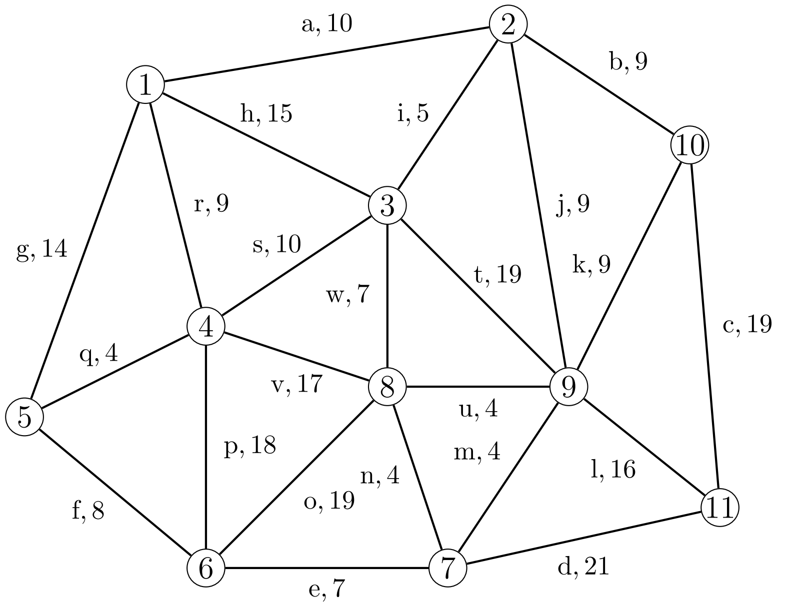
(a) Führen Sie den Algorithmus von Kruskal für den abgebildeten Graphen durch. (3 Punkte)

(b) Führen Sie den Algorithmus von Prim mit Startknoten 1 für den abgebildeten Graphen durch. (3 Punkte)

(c) Wie muss ein Graph aussehen, dass die beiden minimalen Spannbäume, die mit Kruskal und mit Prim gefunden werden, identisch sind? (1 Punkt*)

Aus Ihrer Lösung sollte insbesondere hervorgehen in welcher Reihenfolge die Kanten zum hier entstehenden minimalen aufspannenden Baum hinzugefügt werden.

Beispiel Notation: Die Kante a verbindet die Knoten 1 und 2 und hat das Gewicht 10.



Übung 6.4 (Minimale Spannbäume als ILP) (3 Punkte)

Sei $G = (V, E, c)$ ein ungerichteter, gewichteter Graph mit $c_e \geq 0$ für alle $e \in E$. Stellen Sie ein ILP auf, das den minimalen Spannbaum T^* in G findet.

Hinweis: Nutzen Sie dafür eine (vereinfachte) Variante der Schnitteigenschaft (VL) eines jeden Spannbaums: aus jedem Schnitt in G muss mindestens eine Kante in T^* enthalten sein.

Übung 6.5 (Bipartite Graphen) (3 Punkte*)

Zeigen Sie unter Verwendung der Charakterisierung von Ghouila-Houri (1962) das folgende Korollar aus der Vorlesung.

> Korollar
>
> Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist TU genau dann, wenn der Graph bipartit ist.

---

* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.