Prof. Dr. Nicole Megow
Franziska Eberle

Sommer 2019

Operations Research

Übungsblatt 5 (Abgabe am 14.05.2019)

Übung 5.1 (Big M-Methode) (5 Punkte)

Eine weitere Möglichkeit, jedes LP in endlicher Zeit mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen, ist die sogenannte Groß-M-Methode. Dabei wird Phase I direkt mit Phase II kombiniert und hohe Strafkosten (M) für die künstlichen Variablen eingeführt. Das ursprüngliche LP

$$\begin{array}{lrcl} \min & \sum_{i=1}^n c_i x_i & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

wird zu

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & \sum_{i=1}^n c_i x_i & + & M \sum_{j=1}^m y_j & & \\ \text{s.t.} & Ax & + & y & = & b \\ & x & , & y & \geq & 0 \end{array}$$

umgeformt, wobei $M \gg 0$ eine große Konstante ist. Insbesondere ist M größer als jede Zahl, die im Tableau auftaucht.

Betrachte das LP der Form $\min\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine zulässige Basislösung mit der Groß-M-Methode und stellen Sie das Starttableau für den Simplexalgorithmus auf, wobei M als Parameter mitgeführt werden soll.

Übung 5.2 (Glasmanufaktur) (12 Punkte)

Glassco stellt unterschiedliche Gläser her: Wein-, Bier-, Champagner- und Whiskey-Gläser. Zur Herstellung dieser Gläser wird Zeit in der Glasbläserei und für die Verpackung benötigt. Außerdem wird Glas verbraucht. Die Resourcen, die zur Herstellung benötigt werden, stehen in der Tabelle. Aktuell stehen 600 Minuten in der Glasbläserei und 400 Minuten zur Verpackung zur Verfügung. Außerdem gibt es 500 Kubikmeter Glas. Damit Glassco seinen Ertrag maximieren kann, unten stehendes LP maximiert den Ertrag von Glassco.

	Wein	Bier	Champagner	Whiskey
Glasbläserei	4min	9min	7min	10min
Verpackung	1min	1min	3min	40min
Glas (Kubikmeter)	3	4	2	1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 6x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 20x_4 & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & \leq & 600 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 40x_4 & \leq & 400 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 500 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x4 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Wandeln Sie die Ungleichungen mit Hilfe von Schlupfvariablen in Gleichungen um und bestimmen Sie mit Hilfe von CPLEX die optimale primale Lösung. Es ist nicht nötig, Ihren Code einzureichen. Geben Sie jedoch die Lösung von CPLEX an. (4 Punkte)

(b) Stellen Sie das duale Problem auf. (2 Punkte)

(c) Finden Sie die optimale Lösung des dualen Problems unter Verwendung der gegebenen optimalen primalen Lösungen und des Satzes des komplementären Schlupfes. (3 Punkte)

(d) Finden Sie drei Aussagen zur Interpretation wie in der Vorlesung. (3 Punkte)

Hinweis: Bedenken Sie, dass die optimale Lösung irrational sein kann und damit insbesondere von CPLEX nicht korrekt ausgegeben wird. Falls Sie dies vermuten, bestimmen Sie die optimale Lösung durch scharfes Hinsehen von Hand. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Übung 5.3 (Stabile Menge) (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $U \subset V$ eine Teilmenge von V. Wenn keine zwei Knoten $u, v \in U$ durch eine Kante verbunden sind, nennt man U eine *stabile Menge*. Die *Unabhängigkeits-* oder *Stabilitätszahl* ist die Kardinalität der größten stabilen Menge U eines Graphen.

Modellieren Sie ein ILP um die Stabilitätszahl eines Graphen $G = (V, E)$ zu bestimmen.

Übung 5.4 (Komplementärer Schlupf) (3 Punkte*)

Beweisen Sie den Satz des komplementären Schlupfes mit Hilfe der Sätze über die starke und die schwache Dualität.

Übung 5.5 (3 Punkte*)

Beweisen Sie folgende Sätze aus der Vorlesung.

Satz. In einem einfachen ungerichteten Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Satz (Handshake Lemma). In einem einfachen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

---

* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.