

Operations Research

Übungsblatt 2 (Abgabe am 23.04.2019)

Um LPs mit dem Computer zu lösen, gibt es verschiedene Solver. Wir werden in dieser Veranstaltung den Solver CPLEX von IBM kennenlernen. Installieren Sie bitte CPLEX von der Seite

<https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>

und wählen Sie die Free Edition zum Download aus. Auf der nächsten Seite müssen Sie sich bei IBM registrieren, sich anschließend neu einloggen und die für Ihr System passende Version herunterladen.

Übung 2.1 (Sommerfest)

(5 Punkte)

Lisa möchte ein Sommerfest für ihre 1. Klasse veranstalten und benötigt dafür verschiedene Eissorten (Zitrone, Himbeer, Mango, eine vegane Sorte sowie eine laktosefreie Sorte). Aufgrund früherer Feste weiß sie, dass sie davon mindestens 20, 20, 15, 5 und 8 Stück benötigen wird. Ihr stehen insgesamt vier verschiedene Supermärkte zur Auswahl, um das Eis einzukaufen. Da sie die haushaltsüblichen Mengen in keinem Supermarkt überschreiten möchte, kann sie höchstens 25 Stück pro Supermarkt einkaufen. Eine kurze Internetrecherche hat folgende Stückpreise in Euro ergeben:

	Zitrone	Himbeer	Mango	Vegan	Laktosefrei
S1	1	1,75	1,9	3	2
S2	1,5	1,4	1,3	2	2,5
S3	1,25	1,3	1,6	2,5	3
S4	1	2	1,75	–	–

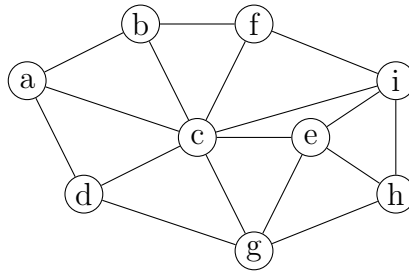
Helfen Sie Lisa, ein ganzzahliges Lineares Programm aufzustellen, um ihre Grundschulkin-der sowie deren Geschwister mit wenig Geld zufrieden zu machen.

Übung 2.2 (Alienkunst)

(7 Punkte)

Nehmen Sie an, dass Sie der Museumsdirektor eines Museums für außerirdische Kunst sind. Zur Eröffnungsfeier Ihres Museums werden auch rivalisierende Aliens eingeladen. Um zu verhindern, dass die Ausstellungsgegenstände die Erde und insbesondere dein Museum verlassen, möchten Sie Ihre Wachmänner mit Laserpistolen einstellen.

Folgender Graph stellt den Grundriss des Museums dar, wobei die Kanten Gänge und die Knoten ihre Kreuzungen darstellen. Ein Wachmann, der auf einer Kreuzung platziert ist, kann jeden benachbarten Gang überwachen.



- (a) Finden Sie heraus, wie viele Wachmänner Sie mindestens einstellen müssen. Geben Sie die Position der Wachmänner an. (3 Punkte)
- (b) Dieses Problem lässt sich formal als Knotenüberdeckung formulieren:
 Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. eine Menge $W \subseteq V$ ist eine Knotenüberdeckung, falls jede Kante $e \in E$ zu mindestens einem Knoten $w \in W$ inzident ist.
 Stelle ein Integer Linear Program auf, um in einem beliebigen Graphen eine Knotenüberdeckung mit minimaler Größe zu finden. (4 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie die Variablen x_v für $v \in V$.

Übung 2.3 (Herr Lustig) (10 Punkte)

Der Gärtner Herr Lustig möchte ab sofort seinen Dünger selbst mischen, da sein Löwenzahn sehr anspruchsvoll ist. Er kann dafür zwei verschiedene Grundstoffe verwenden, G_1 und G_2 . Er weiß, dass sein Löwenzahn 2kg Dünger im nächsten Monat benötigen wird. Leider kann er nicht soviel für seinen Löwenzahn ausgeben, wie er gerne möchte, sondern maximal 5€. Der Grundstoff G_1 kostet 1€ pro Kilogramm und G_2 2€.

In Feldstudien hat er herausgefunden, dass G_1 einen Bestandteil EVIL enthält, der seiner Lieblingspflanze schaden kann. Um diesen negativen Einfluss auszugleichen, muss mindestens halb so viel GOOD des Grundstoffs G_2 in der fertigen Mischung sein.

	Stickstoff	Nitrat	Phosphor	EVIL	GOOD
G_1	15	10	30	10	–
G_2	10	20	10	–	10

- (a) Geben Sie die Nebenbedingungen an und zeichnen Sie die zulässige Region. (4 Punkte)
- (b) Geben Sie die Zielfunktion an, um den im Dünger enthaltenen Phosphor zu maximieren und lösen Sie das Problem graphisch. (1 Punkte)
- (c) Wie ändert sich die Zielfunktion, wenn Herr Lustig den Nitratanteil maximieren möchte? Lösen Sie graphisch. (1 Punkte)
- (d) Lösen Sie die beiden linearen Programme mit Hilfe des Programms CPLEX. Orientieren Sie sich dabei an den auf der Homepage des Kurses bereitgestellten Lösungen für das Chipsfabrikproblem. (4 Punkte)

Übung 2.4 (5 Punkte)

Wandeln Sie folgende LPs in Standardnormalform um und geben Sie sie in Matrixschreibweise an.

(a)

$$\begin{array}{rll} \max & 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 \leq 1 & \\ & 2x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 2 & \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 + 6x_5 \geq 3 & \\ & -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 \geq 4 & \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \geq 0 & \\ & x_4 \geq 0 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rll} \min & c^\top x + d^\top y & \\ \text{s.t.} & Ax \geq b & \\ & Bx + Dy = f & \\ & x \geq 0, & \end{array}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sowie $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^q$, und $f \in \mathbb{R}^p$.

Übung 2.5

(5 Punkte*)

Seien $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 \leq 0\}$ ist ein Polyeder. (1 Punkt)
- (b) Die leere Menge ist ein Polyeder. (1 Punkt)
- (c) Die Menge $P \cap Q$ ist konvex. (1 Punkt)
- (d) Die Menge $P \setminus Q$ ist konvex. (1 Punkt)
- (e) Die Menge $P + Q := \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}$ ist konvex. (1 Punkt)

* Diese Aufgaben können gelöst werden, um Punkte für den Notenbonus zu sammeln. Sie werden *nicht* für die Berechnung der erreichbaren maximalen Punktzahl verwendet.

Programmieraufgaben: Bitte reichen Sie Ihren Programmcode sowie alle zugehörigen Dateien per E-Mail an eberle@uni-bremen.de vor Beginn der Vorlesung ein. Um Punkte für Programmieraufgaben zu bekommen, sollen diese ggf. in der Rechnerübung erklärt werden. Höchstens eine Programmieraufgabe kann zum Erreichen des Notenbonus vorgestellt werden.

Notenbonus: Es ist möglich, einen Notenbonus in Höhe von einem Notenschritt zu erwerben (d.h. 4.0 wird zu 3.7, oder 3.7 wird zu 3.3, usw. Die Noten 1.0, 5.0 und 6.0 können nicht verbessert werden).

Der Notenbonus wird erworben, indem insgesamt mindestens 60% der in den Übungsblättern erreichbaren Punkte erzielt werden und darüber hinaus die Lösungen von mindestens drei Übungsaufgaben im Tutorium vorgestellt werden. Höchstens eine der drei Übungen darf eine Rechnerübung sein.

Offensichtliche Täuschungen führen zum Ausschluss vom Notenbonus.